Reseña

Adolfo García de la Sienra, *Reflexiones sobre la paradoja de Orayen*, UNAM-IIF, México, 2008, 240 pp.

El texto *Reflexiones sobre la paradoja de Orayen* fue compilado por el Dr. Adolfo García de la Sienra, profesor de esta Universidad Veracruzana. La obra fue publicada por el Instituto de Investigaciones Filosóficas de la Universidad Nacional Autónoma de México. El texto representa un trabajo que tiene una temática por demás interesante; constituye el resultado de un serio esfuerzo de varios filósofos que discuten sobre cuestiones actuales acerca de filosofía de la lógica. Específicamente, la discusión se centra en explorar la autointerpretación del lenguaje lógico mediante la teoría de conjuntos.

La labor de organizar las diferentes perspectivas desde las cuales puede ser abordada una cuestión para lograr una articulación armónica, no es algo sencillo; representa una tarea que requiere conocimiento y dominio sobre la temática, e indudablemente quien lleva la dirección del trabajo al que nos estamos refiriendo lo ha logrado, ya que desde la introducción nos presenta una verdadera ruta para la travesía que comienza cuando emprendemos la lectura del libro.

El texto, como Agustín Rayo comenta, busca rendir un homenaje póstumo al Dr. Raúl Orayen Flores, Investigador del Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM, quien es considerado uno de los mayores representantes de la filosofía en Hispanoamérica y cuyas contribuciones están referidas específicamente a los problemas filosóficos suscitados por la lógica y la ciencia.

La contribución de los investigadores en esta obra tiene como motivación fundamental destacar el trabajo intelectual del Dr. Orayen, así como la genuina contribución al desarrollo del pensamiento filosófico dentro del área de la lógica y filosofía de la lógica; los autores reflexionan y discuten de manera profunda sobre una de las temáticas que ha ocupado la mente de los intelectuales dedicados al estudio de la lógica, nos referimos específicamente al problema que Orayen detectó en torno a la interrelación entre la teoría de conjuntos y la semántica de los modelos formales, y que Alchourrón ha designado como la Paradoja de Orayen.

Las aportaciones referidas al problema que se muestran en el texto son: "Nota crítica sobre la paradoja de Orayen", de Agustín Rayo; "Sobre la parapraxis de Orayen", de Atocha Aliseda; "Circularidad lógica y conjuntos", de Sandra Lazzer; "La teoría de modelos de la teoría de conjuntos: un concepto delicado", de José Alfredo Amor; "Axiomas, formalización y teoría de conjuntos", de Ignacio Jané; "Teoría general de las clases", de Adolfo García de la Sienra; "Irresolubilidad de la paradoja de Orayen", de Max Freund; "Semánticas de la lógica de segundo orden", de Ángel Nepomuceno Fernández; "La interpretación de los lenguajes de primer orden", de Alberto Moretti; "¿Hay un supuesto conjuntista en la paradoja de Orayen?", de Eduardo Alejandro Barrio; "Interpretaciones y conjuntos", de Mario Gómez Torrente y "De la interpretación", de Axel Barceló.

Con el más fino estilo analítico, los 12 artículos nos ofrecen una visión rigurosa y completa de los diferentes enfoques desde los cuales puede ser abordada la Paradoja de Orayen. Las reflexiones lógico-filosóficas que se entrelazan en la obra y que surgen de los diferentes planteamientos presentados por los autores, permiten la discusión e interacción con el lector atento a los problemas que de ahí emanan. Sobre todo, los artículos detonan una intensa controversia en filosofía de la lógica que fue introducida por Van Heijenoort en su texto "Logic as Calculus and Logic as Language" (Van Heijenoort 1967), a saber, determinar el estatus de la lógica, entendida como cálculo o como lenguaje. Así, el texto llama la atención en una discusión que ha configurado el desarrollo de la lógica como un estudio sintáctico o análisis semántico.

La lógica entendida como cálculo se centra en la reflexión de las relaciones formales combinatorias entre símbolos, en donde no son considerados los contenidos de los enunciados, en tanto que no pretenden considerar categorías semánticas u ontológicas, esto es, se ocupa de analizar las reglas que permiten convertir las operaciones deductivas en un cálculo riguroso y eficaz que puede recibir diferentes interpretaciones en diferentes dominios de objetos. En cambio, la concepción de la lógica como lenguaje implica considerar un dominio concreto de aplicación, sus términos se encuentran ligados a una concepción ontológica determinada; no admite la posibilidad de interpretaciones diferentes hechas en diferentes dominios. Así, el lenguaje resultará ser una notación universal que reflejará categorías ontológicas básicas.

Tenemos entonces que, la cuestión puede admitir diferentes interpretaciones según los intereses que se tengan presentes, en función de la posición que se adopte con respecto a la lógica. Esta gama de perspectivas va desde los que asumen que tal paradoja no puede ser solucionada hasta aquellos que no ven ninguna paradoja, pasando por aquellas en las que se abordan cuestiones de circularidad y autointerpretación asociadas a la paradoja mencionada. Así, el problema que identificó Orayen en torno a la interrelación entre la teoría de conjuntos y la semántica del lenguaje de primer orden se profundiza en los trabajos presentados, cada uno de los cuales apunta hacia diferentes direcciones de discusión, otorgándonos la ventaja de tener un análisis mediante argumentos sólidos y pruebas formales que sirven de sustento a sus posiciones teóricas.

El planteamiento problemático que genera la discusión es posible expresarlo de la siguiente manera: Ningún modelo es capaz de interpretar la semántica de la teoría de conjuntos, pues la teoría de conjuntos trata de todos los conjuntos —exceptuando el conjunto de todos los conjuntos— y el modelo es un conjunto que se supondría abarcar todos los conjuntos. La paradoja ocurre por el hecho de que toda elaboración de un modelo supone para operar la teoría de conjuntos, por lo menos a un nivel intuitivo, al adoptar este fundamento matemático se autoimposibilita para expresar las restricciones que articulan dicho fundamento.

Esto es, si fuera posible expresar en un modelo el dominio de interpretación de la teoría de conjuntos, se presentaría el problema de que el modelo no puede autointerpretarse, ya que tendría que interpretar aquello que le posibilita hacer la interpretación. Toda interpretación ofrece un modelo en términos conjuntistas pero no puede interpretar su interpretación conjuntista.

Aún cuando todos los trabajos que integran el libro son por demás interesantes, profundos y pertinentes en el tratamiento de la cuestión, a continuación describiremos brevemente algunas de las consideraciones presentadas por los autores de seis artículos. En "Nota crítica sobre la paradoja de Orayen", Agustín Rayo nos presenta su formulación de la paradoja de Orayen. Tras preguntar *¿Podríamos formular la interpretación deseada del lenguaje de la teoría de conjuntos sin apelar a modelos (o, por lo menos, sin apelar al tipo de modelo que da lugar al problema)?*, señala que para responderla es necesario ofrece previamente tres posibles respuestas de lo que podríamos obtener de una interpretación del lenguaje de la teoría de conjuntos; a saber:

a) Hacer una semántica, esto es, para caracterizar un predicado de verdad que permita probar cada instancia del esquema (T) de Tarski (pp. 30-31).
b) Una caracterización semántica de *consecuencia lógica* para el lenguaje de la teoría de conjuntos (p. 36).
c) Proporcionar una semántica generalizada para los lenguajes de primer orden; es decir, caracterizar un predicado de verdad-de-acuerdo-con-una-asignación-posible-de-significado (p. 37).

Tras analizar las propuestas, señala que si nuestro objetivo está orientado hacia la elaboración de una semántica en el lenguaje de la teoría de conjuntos, de acuerdo con el teorema de Tarski, el primer proyecto no es viable. La segunda propuesta no representa mayor problema en tanto que a partir del teorema de completud de Gödel hay una caracterización adecuada de la noción de consecuencia lógica para la teoría de conjuntos. Sin embargo, el tercer proyecto, es el que nos remite a problemas en tanto que la noción de verdad-en-un-modelo, como caso particular de verdad-de-acuerdo-con-una-asignación-posible-de-significado, puede llegar a ser insuficiente cuando buscamos garantizar la verdad o cuando se busca una noción de consecuencia lógica que funcione en otros lenguajes distintos de los de primer orden. Sin embargo, son éstas últimas cuestiones las que nos permiten abordar de manera genuina una de las cuestiones fundamentales en la filosofía de la lógica, a saber, asumir la lógica como cálculo o la lógica como lengua característica.

Por su parte, Atocha Aliseda, en su artículo “Sobre la parapraxis de Orayen” inicia con una reflexión sobre los diferentes trabajos presentados para abordar la llamada Paradoja de Orayen (PO), mismos que nos permiten reconocer la situación del problema identificado por Orayen dentro de la teoría de conjuntos, a la vez que se presentan las posibles vías de solución para el problema.

Aliseda plantea la cuestión de si la nombrada PO, es realmente una paradoja. Tras un minucioso análisis del concepto de paradoja desde el punto de vista lógico y semántico concluye que el planteamiento problemático de Orayen no cumple con las dos condiciones para ser considerada como paradoja, a saber, autorreferencia o contradicción; por lo cual, propone un renombramiento de la cuestión. Debido a que el problema que planteó Orayen es de tipo práctico, ya que "intenta tomar de base a la teoría de conjuntos (tipo Zermelo-Fraenkel) para construir la semántica de la lógica cuantificacional y simultáneamente usar la teoría cuantificacional para formalizar la teoría de conjuntos", sostiene que el problema remite no a una paradoja sino a una parapraxis, entendida en su acepción más genuina: "en contra la práctica", en tanto que nos sitúa ante la imposibilidad de construir el dominio de un modelo que capte la teoría.

La aportación presentada por José Alfredo Amor en su artículo "La teoría de modelos de la teoría de conjuntos: un concepto delicado" comienza ofreciéndonos, a manera de introducción, una definición de lo que es una paradoja y señala que aunque parece que no tienen solución es posible que mediante un profundo análisis podamos entenderlas y solucionarlas. Incluso, enlista una serie de casos presentados a lo largo de la historia en la cual mediante un examen cuidadoso se ha llegado a la comprensión y aclaración de las paradojas.

De una manera didáctica continua su exposición y nos introduce en la teoría de modelos a partir de la revisión de conceptos básicos para su comprensión, tales como, interpretación, asignación de entidades particulares, constantes lógicas, teoría formal, modelo de una teoría formal, todo ello con la finalidad de encaminarnos a la presentación de la teoría de conjuntos del tipo (ZFC) a partir de la consideración de sus principales nociones y operaciones, ya que constituye la base para el tratamiento que ofrecerá de la Paradoja de Orayen.

A partir de la cuestión ¿hay un supuesto conjuntista en la paradoja de Orayen?, la contribución de Alejandro Barrio tendrá como objetivo fundamental señalar que el problema identificado por Orayen -al reflexionar la imposibilidad de formalizar la semántica de los lenguajes formales mediante una teoría de conjuntos- se presenta también en la teoría de modelos, ya que cuando se le pretende utilizar como una teoría a partir de la cual se pueden interpretar *todos* los posibles modelos de las teorías formales se reconoce la imposibilidad de que ella misma pueda autointerpretarse. Y a propósito señala:

> El problema parece estar en la *circularidad* de una teoría de la interpretación que se proponga expresar, por sus propios medios expresivos, cómo formalizarse, en el sentido de poder contar, dentro de sus propios compromisos ontológicos, con una colección (sea o no sea ésta un conjunto) capaz de reunir todas aquellas entidades de las que habla ella misma . . . Por eso, cuando esperamos que TM brinde un análisis general de la noción de *modo de interpretación*, deseamos que haya uno que incluya como caso aquel que consiste en autoaplicarse. Lo que la paradoja muestra es que no hay una manera apropiada de analizar el concepto de *modo de interpretación* a partir del concepto de *estructura*, ya que no hay una colección que forme parte de alguna teoría de las colecciones que sea capaz de construir una estructura apropiada que se autointerprete (p. 200).

Así, a partir de lo anterior, es posible reconocer que el proyecto de ofrecer una teoría general de la interpretación de los lenguajes formales no se puede llevar a cabo. Adolfo García de la Sienra en "Teoría general de las clases" cuestiona el hecho de que los lenguajes formales poseen una semántica conjuntista: en ello radica "la gran enseñanza" de la paradoja de Orayen. Esta situación es atendida mediante una teoría de clases mucho más general y fundamental que el algebra, la teoría de conjuntos y de modelos, y por ende constituye una teoría fundamental de las matemáticas, con excepción de la geometría. Esta teoría se desarrolla a partir de la idea de Bell y Machover (1977), que nos dice que una estructura $\mathfrak{A}$ "no es necesariamente un conjunto sino en general una clase". Bajo este entendido, García de la Sienra defiende que si obtenemos los beneficios esperados de la teoría de clases planteada, entonces se podría realizar teoría de modelos sin el problema que detectó Orayen.

Dicha teoría de clases lleva por nombre ARCU, y tiene su origen en Ackerman (1956) y Muller (2001). Éste último generaliza la teoría del primero introduciendo un lenguaje formalizado para la teoría fundamental de clases y añadiendo un axioma de elección. Al interior de esta teoría los valores de las variables se designan con el predicado: "(1) es una clase". La aportación de García de la Sienra a este andamiaje formal consiste en añadir elementos que no son conjuntos, a saber, elementos para sortear aplicaciones de la teoría en donde no se requieren elementos que son conjuntos. Así la teoría fundamental de clases ARC llega a ser ARCU.

En el desarrollo del texto podemos ver la construcción del lenguaje y los axiomas de ARCU, pero sobre todo la demostración formal de que "si ARCU es verdadera, entonces ZFC es consistente y todos los resultados y recursos de esta última teoría están disponibles en ARCU. Más aún, es factible desarrollar dentro de ARCU la teoría de modelos, pues las construcciones de esta última teoría son entidades de las que trata ARCU". Así pues, ARCU queda demostrada como un algebra universal, y esto constituye una aportación importante para el estudio de los fundamentos de la matemática.

Si planteamos la paradoja de Orayen desde una de sus consecuencias teóricas y prácticas como lo es la autointerpretación, ARCU no resuelve la paradoja, ya que "ARCU no se puede interpretar dentro de ARCU". Ahora bien, la labor teórica realizada con ARCU no es trabajo en vano, pues: 1) ARCU constituye una teoría fundamental de clases que fundamenta la teoría de conjuntos y modelos, ambas tomadas como soporte de las matemáticas, y 2) ARCU es un claro ejemplo de que la paradoja de Orayen alcanza y corroe a las teorías de clases interpretadas en un modelo.

En "Interpretaciones y conjuntos" Mario Gómez Torrente comienza señalando que desde hace aproximadamente medio siglo la teoría de conjuntos ha sido el fundamento de las interpretaciones de lenguajes formales. Sin embargo, también es posible reconocer que tal supuesto es discutible, en tanto que "es común creer que la interpretación deseada del lenguaje formal de la teoría de conjuntos no es un conjunto, ni se corresponde de manera inmediata con uno" (p. 207).

Tomando como punto de partida lo anterior, su contribución está dirigida a revisar la posibilidad de abandonar la teoría de conjuntos como única fuente posible de interpretaciones y trabajar en una nueva noción técnica de consecuencia lógica definida en términos de un nuevo conjunto de interpretaciones.

Las tres propuestas que presenta son: 1) restringir los lenguajes lógicos a interpretaciones expresivas; 2) incluir en el discurso un soporte basado en lenguaje de clases e hiperclases; 3) ver las interpretaciones como valores de las variables de orden superior del lenguaje de la teoría de tipos. Gómez Torrente reconoce que todas ellas resultan ser problemáticas. Sin embargo, propone una nueva interpretación del universo de los conjuntos para asumir que cualquier conjunto de oraciones verdaderas en una estructura con una clase propia como dominio es satisfecho también por una estructura conjuntista. Con la finalidad de revisar cómo esta nueva interpretación puede ser viable para resolver algunos problemas, se centra específicamente, en de la cuantificación irrestricta, mismo que es presentado a partir del análisis de un argumento de Timothy Williamson.

Así pues, El libro *Reflexiones sobre la paradoja de Orayen* constituye también un claro ejemplo de discusión y polémica que incita a la revisión y valoración de cada una de las posiciones que asumen los filósofos que en él participaron.

Finalmente, esperamos que las consideraciones antes presentadas generen el deseo de unirse al tipo de reflexión analítico-crítica que encontramos a lo largo de la lectura de todos los artículos. Ciertamente, como cualquier quehacer filosófico la reflexión que iniciamos no concluirá, y posiblemente nos conduzca a otros problemas y terrenos que es necesario explorar, en tanto que constituyen una genuina veta de investigación para todos aquellos que deseen involucrarse con los temas considerados como típicos de la filosofía de la lógica.

Referencias

Ackerman, W., 1956, "Zur Axiomatik der Mengenlehre", *Mathematische Annalen*, vol. 131, pp. 336–345.

Bell, J. y M. Machover, 1977, *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam.

Muller, F.A., 2001, "Sets, Classes and Categories", *British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 52, pp. 539–573.

Van Heijenoort, J., 1967, "Logic as Language and Logic as Calculus", *Synthese*, vol. 17, pp. 324–330.

MARTHA VANESSA SALAS DEL ANGEL
Doctorado en Filosofía
Universidad Veracruzana