Stoa
Vol. 3, no. 5, 2012, pp. 185–193
ISSN 2007-1868

EL PROBLEMA DE LA DIFERENCIABILIDAD DE LA PREFERENCIA*

Adolfo García de la Sienra
Facultad de Economía
Instituto de Filosofía
Universidad Veracruzana
asienrag@gmail.com

RESUMEN: La meta de este artículo es plantear un problema en los fundamentos de la teoría del consumidor. El problema es si es posible determinar una condición empíricamente significativa sobre la relación de preferencia del consumidor —aunque sea idealizada— que garantice la existencia de una función de utilidad continuamente diferenciable que represente dicha relación.

PALABRAS CLAVE: teoría del consumidor · preferencias diferenciales · utilidad continuamente diferenciable.

ABSTRACT: The aim of the present paper is to formulate a problem in the foundations of consumer theory. The problem is whether it is possible to determine an empirically meaningful condition on the preference relation of the consumer —even if idealized— that guarantees the existence of a continuously differentiable utility function representing that relation.

KEYWORDS: consumer theory · differentiable preferences · utility.

1. Introducción

La teoría clásica de la demanda pretende derivar la función de demanda walrasiana a partir de axiomas sobre la relación de preferencia que atribuyen propiedades empíricamente significativas al consumidor. Una de estas propiedades es, por ejemplo, la insaciedad local, la cual consiste en una disposición del consumidor a encontrar menús de consumo superiores a uno dado dentro de cualquier vecindad de

* El presente artículo fue producido con el apoyo del proyecto CONACYT 127380, Filosofía de la Economía.

éste. Puede ser falso afirmar que un consumidor determinado tiene esta propiedad, pero el punto es que al menos la propiedad tiene sentido *empírico*. Lo que me propongo hacer aquí es plantear el problema de encontrar una condición con significado empírico sobre la relación de preferencia que garantice que la función de demanda walrasiana derivable de la misma sea C^1. Mas-Collel, Whinston y Green (1995, p. 49) afirmaron que "es posible dar una condición puramente en términos de preferencias" que implique que una función de utilidad que la represente sea C^2:

> Intuitivamente, lo que se requiere es que los conjuntos de indiferencia sean superficies lisas (*smooth*) que encajen agradablemente entre sí, de modo que las tasas a las que las mercancías se sustituyen entre sí dependan diferenciablemente de los niveles de consumo.

No obstante, no está claro qué propiedad empíricamente significativa debe tener el consumidor para que los conjuntos de indiferencia de su relación de preferencia encajen "agradablemente entre sí". Lo que es peor, la diferenciabilidad C^2 es restrictiva porque algunas funciones de demanda que sí son derivables no provienen de una función de utilidad C^2, como los mismos autores han observado (Mas-Colell, Whinston y Green 1995, p. 95, n. 33). Además, como Gerard Debreu (1972; 1983, p. 201) ha señalado, es suficiente que la función de utilidad sea C^1 para que la función de demanda correspondiente también lo sea. Así, parece claro que lo indicado es buscar una propiedad empíricamente significativa del consumidor que implique que su función de utilidad es C^1. ¿Puede encontrarse una condición tal que pueda considerarse lo suficientemente natural y general como para pasar a formar parte de la teoría clásica de la demanda? El objetivo de este artículo es abordar esta pregunta tratando de identificar tal propiedad.

2. El concepto de demanda walrasiana

La teoría de la elección individual nos dice que el agente tiene una regla de elección η que especifica, en cada situación, las elecciones aceptables para el agente en esa situación. Así, η es una correspondencia $\eta{:}\mathscr{B} \to X$ (o sea, una función $\eta{:}\mathscr{B} \to \mathbf{pot}(X)$ en la potencia de X) con la propiedad de que $\eta(B) \subseteq B$ para cada $B \in \mathscr{B}$. Es por ello que es natural teorizar una circunstancia de elección individual mediante el concepto de estructura de elección.

Definición 1 $\mathfrak{E}$ es una *estructura de elección* syss existen X, $\mathcal{B}$ y η tales que

(0) $\mathfrak{E} = \langle X, \mathcal{B}, \eta \rangle$;

(1) X es un conjunto no vacío;

(2) $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos no vacíos de X;

(3) $\eta : \mathcal{B} \to \mathbf{pot}(X)$ es una función que asigna a cada $B \in \mathcal{B}$ un subconjunto no vacío $\eta(B)$ de X;

(4) $\forall B \in \mathcal{B}$: $\eta(B) \subseteq B$.

Como una especialización inmediata de este concepto, obtenemos el concepto de estructura de demanda. Si X es un subconjunto de $\mathbb{R}^L$, el símbolo X° denota su interior, con respecto a la topología usual de $\mathbb{R}^L$.

Definición 2 $\mathfrak{E}$ es una *estructura de demanda walrasiana* syss existen X, $\mathcal{B}$, η, L y φ tales que

(0) $\mathfrak{E} = \langle X, \mathcal{B}, \eta \rangle$

(1) L es un entero positivo y X es el ortante no negativo Ω de $\mathbb{R}^L$;

(2) $\varphi{:}\Omega^\circ \times \mathbb{R}_+ \to \Omega$ es una correspondencia;

(3) $\forall(\mathbf{p}, w) \in \Omega^\circ \times \mathbb{R}_+$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^\circ$: $\varphi(\alpha\mathbf{p}, \alpha w) = \varphi(\mathbf{p}, w)$
(homogeneidad de grado cero);

(4) $\forall(\mathbf{p}, w) \in \Omega^\circ \times \mathbb{R}_+, \forall \mathbf{x} \in \varphi(\mathbf{p}, w)$: $\mathbf{px} = w$
(Ley de Walras);

(5) $B \in \mathcal{B}$ syss existe $(\mathbf{p}, w) \in \Omega^\circ \times \mathbb{R}_+$ tal que $B = \{\mathbf{x} \in \Omega \,|\, \mathbf{px} \leq w\}$;

(6) Para todo $B \in \mathcal{B}$: si $B = \{\mathbf{x} \in \Omega \,|\, \mathbf{px} \leq w\}$ entonces $\eta(B) = \varphi(\mathbf{p}, w)$.

En cada situación de precios y riqueza $(\mathbf{p}, w)$, la correspondencia de elección η describe la elección de menús de consumo que haría el consumidor en el conjunto $B_{\mathbf{p},w} = \{\mathbf{x} \in \Omega \,|\, \mathbf{px} \leq w\}$ determinado por esa situación. Así interpretada, la correspondencia η se denomina *correspondencia de demanda* y se tiene $\eta(B_{\mathbf{p},w}) = \varphi(\mathbf{p}, w)$. En el caso particular en que todos los conjuntos $\varphi(\mathbf{p}, w)$ son unitarios, la correspondencia de demanda es una función —la *función de demanda*— que asocia a cada par $(\mathbf{p}, w)$ el único elemento de $\varphi(\mathbf{p}, w)$. Éste es el caso particular que usualmente estudia la teoría de la demanda clásica, el cual es una ulterior especialización de la teoría de la elección (o sea, es una especialización de la teoría de la demanda). El problema que me ocupa en este trabajo sólo tiene sentido en relación con este caso.

DEFINICIÓN 3 $\mathfrak{D}$ es una *estructura de demanda univalente* syss existen X, $\mathcal{B}$, η, L y φ tales que

(0) $\mathfrak{D} = \langle X, \mathcal{B}, \eta \rangle$;

(1) $\mathfrak{D}$ es una estructura de demanda;

(2) Para cada $(\mathbf{p}, w) \in \Omega^\circ \times \mathbb{R}_+$: $\eta(B_{\mathbf{p},w})$ es un conjunto unitario;

(3) $\varphi : \Omega^\circ \times \mathbb{R}_+ \to \Omega$ es una función cuyo valor, para cada $(\mathbf{p}, w) \in \Omega^\circ \times \mathbb{R}_+$, es el único elemento de $\eta(B_{\mathbf{p},w})$;

(4) φ es C^1.

Una estructura de demanda univalente representa a un consumidor competitivo cuya correspondencia de elección es una función. Es por ello que pensaremos las estructuras de demanda como estructuras de elección.

3. Teoría clásica de la demanda

La teoría clásica de la demanda se ocupa del problema de generar estructuras de demanda a partir de estructuras de preferencia. Por estructura de preferencia en su sentido más general entiendo un par consistente en un conjunto no vacío X y lo que usualmente se llama una relación de preferencia racional o regular; esto es, una relación binaria R sobre X que es conectada y transitiva en X.

El espíritu de la teoría clásica de la demanda es el de derivar las propiedades de la correspondencia de demanda a partir de propiedades empíricamente significativas y hasta naturales de la relación de preferencia. Un ideal estético de la misma es, por lo tanto, que *todas* estas propiedades sean del mismo color. Para generar una estructura de demanda walrasiana univalente se requiere una estructura de preferencia como la siguiente, donde el predicado "liso" requiere ser definido mediante la condición buscada.

DEFINICIÓN 4 $\mathfrak{P}$ es una *estructura de preferencia clásica* syss existen Ω, R y un entero positivo L tal que

(0) $\mathfrak{P} = \langle \Omega, R \rangle$;

(1) Ω es el ortante no negativo de $\mathbb{R}^L$;

(2) R es una relación binaria sobre Ω;

(3) R es conectada en Ω;

(4) R es transitiva en Ω;

(5) R es estrictamente convexa;

(6) R es localmente insaciada;

(7) R es lisa.

El concepto de estructura de demanda generada a partir de una estructura de preferencia se puede precisar como sigue.

DEFINICIÓN 5 Sea $\mathfrak{P} = \langle X, R \rangle$ una estructura de preferencia, $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos no vacíos de X, y $B \in \mathcal{B}$. El *conjunto de alternativas aceptables* de B según R se define como

$$\eta^*(B, R) = \{x \in B \mid Rxy \text{ para todo } y \in B\}.$$

La estructura de elección *generada por* $\mathfrak{P}$ y $\mathcal{B}$ es la estructura $\langle X, \mathcal{B}, \eta \rangle$, donde $\eta(B) = \eta^*(B, R)$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Nótese que si B es convexo y $\eta(B)$ contuviera más de un elemento, digamos y además de x, tendríamos $\alpha x + (1 - \alpha y) \in B$. Pero, como R es estrictamente convexa, $z = \alpha x + (1 - \alpha y)$ sería estrictamente preferido tanto a x como a y, y así tendríamos un elemento $z \in B$ estrictamente preferido a x. Esto muestra que la correspondencia η es univalente y que la siguiente proposición es verdadera.

PROPOSICIÓN. *Si $\mathfrak{D} = \langle \Omega, \mathcal{B}, \eta \rangle$ es una estructura de elección generada por una estructura de preferencia clásica, y los conjuntos en $\mathcal{B}$ son convexos, entonces $\mathfrak{D}$ es una estructura de demanda walrasiana univalente.*

Las condiciones (3)-(6) de la Definición 4 son empíricamente significativas pero (7) ha sido formulada como una condición muy abstracta cuyo significado empírico, a diferencia del de las demás condiciones, no es aparente. El problema que nos ocupa es expresar esta condición de suavidad en un lenguaje que tenga sentido empírico (como las otras condiciones de la Definición 4) y que garantice simplemente que la utilidad sea de tipo C^1, pues no se necesita más para la teoría de la demanda.

La condición de "suavidad" ha sido interpretada por Mas-Colell en términos del concepto de variedad diferenciable, dando lugar al siguiente importante teorema.

TEOREMA 1 (MAS-COLELL 1985) *Sea X un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^L$ y R una relación regular de preferencia sobre X, localmente insaciada, cuyos conjuntos de indiferencia son conectados. Entonces R es representable por una función de utilidad C^k sin punto crítico syss la frontera de R es una variedad C^k.*

[Se omite la demostración.]

Una interpretación que se acerca más a la condición buscada es la de curvatura gaussiana de la curva de indiferencia en cada punto. En términos de la misma, Gerard Debreu demostró el siguiente resultado.

TEOREMA 2 (DEBREU 1972) *Sea X un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^L$ y R una relación regular de preferencia sobre X que es monótona, continua, y cuya frontera es una variedad C^2. Si los conjuntos de indiferencia de R no intersectan la frontera de X, entonces existe una función de demanda φ de clase C^1 syss la curvatura gaussiana es distinta de cero en cada punto de las hipersuperficies de indiferencia.*

[Se omite la demostración.]

Quisiera concluir esta presentación con una reflexión acerca del significado de la condición sobre la curvatura de las hipersuperficies de indiferencia. En primer lugar, la definición de curvatura gaussiana que propone Debreu (tomada de Hicks 1965, sec. 2.2) presupone *de facto* que las hipersuperficies de indiferencia son ya variedades diferenciables (de hecho, Debreu supone que son variedades de clase C^2), por lo que la condición lo único que hace es trasladar el problema a un nivel más profundo. Pues la pregunta es, precisamente, cual es la propiedad que habría que atribuirle al consumidor para garantizar que las superficies de indiferencia sean variedades diferenciables en primer lugar. En la definición de Debreu, la cuestión relativa a si la curvatura gaussiana de la variedad es distinta de cero o no sobreviene una vez que se ha resuelto el primer problema.

Creo que la condición empíricamente significativa sobre la relación de preferencia que implica la existencia de una función de utilidad C^1 es la siguiente, a saber, *que la tasa de cambio de las preferencias se transforma de modo continuo, de modo que varía sólo infinitesimalmente en el halo de cualquier menú de consumo*. El problema es expresar esta condición en el lenguaje cualitativo de la teoría de la preferencia.

Para sugerir la plausibilidad de la condición, quisiera mostrar aquí que la misma implica que las hipersuperficies de indiferencia son variedades C^1. Para empezar, los axiomas de la Definición 4, (1)-(6) garantizan que las hipersuperficies de indiferencia son "curvas" continuas (hipersuperficies conectadas). En el caso de las hipersuperficies de indiferencia, la condición que buscamos se puede traducir a una condición geométrica que se encuentra en el Artículo 3 de las *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss, el cual empieza así:

> se dice que una superficie curva posee curvatura continua en uno de sus puntos *A* si las direcciones de todas las líneas rectas dibujadas de *A* a puntos de la superficie a una distancia infinitamente pequeña de *A* se desvían inifinitamente poco de uno y el mismo plano que pasa a través de *A*. Se dice que este plano *toca* la superficie en el punto *A*.*

Claramente, el significado empírico de la curvatura continua de la hipersuperficie de indiferencia es que el agente no es brusco en sus cambios de gustos. Esto implica que en una vecindad infinitesimal del punto $\mathbf{x}_0$ (el halo, $\mathrm{hal}(\mathbf{x}_0)$, de $\mathbf{x}_0$) los puntos indiferentes a $\mathbf{x}_0$ forman aproximadamente un plano; *i.e.* $\mathrm{hal}(\mathbf{x}_0) \cap [\mathbf{x}_0]$, donde $[\mathbf{x}_0]$ es el conjunto de indiferencia de $\mathbf{x}_0$, es "casi" una superficie plana. Una manera de expresar esto consiste en decir que hay un hiperplano $\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)$ tal que el ángulo formado por un segmento cualquiera $\overline{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1}$, con $\mathbf{x}_1 \in \mathrm{hal}(\mathbf{x}_0) \cap [\mathbf{x}_0]$, se desvía infinitamente poco de $\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)$.

* Citado por Stroyan (1977, p. 17). La traducción es mía.

Por un teorema debido a Stroyan (1977, p. 217), se tiene que $[\mathbf{x}]$ es una variedad C^1 (de m dimensiones) para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, con cartas provistas por la proyección local sobre los planos tangentes. $[\mathbf{x}]$ es cubierto por un atlas $\mathscr{A}_{\mathrm{x}}$ de cartas en el que cada carta es un homeomorfismo σ de una vecindad V de $\mathbf{x}$ sobre una bola m-dimensional, y la composición de la carta ρ con σ^{-1} es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^m$, siempre que la composición está definida.

Para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, $I_{\mathrm{x}} = [\mathbf{x}] \times [\mathbf{x}]$ es también una variedad C^1, con cartas definidas como sigue. Si $\sigma_1 : V_1 \to \mathbb{R}^m$ es una carta en $\mathbf{x}_1$ y $\sigma_2 : V_2 \to \mathbb{R}^m$ es una carta en $\mathbf{x}_2$, la carta en $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ es la carta producto

$$(\sigma_1, \sigma_2) : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}^{2m},$$

definida por la condición

$$(\sigma_1, \sigma_2)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\sigma_1(\mathbf{x}_1), \sigma_2(\mathbf{x}_2)).$$

La frontera de R es

$$I = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mid I\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\} = \bigcup_{\mathrm{x} \in \Omega} I_{\mathrm{x}},$$

por lo que podría pensarse que las cartas (σ_1, σ_2) forman un atlas que convierte a I en una variedad C^1. Desafortunadamente, ello no es así porque la condición cualitativa sobre la relación de preferencia no se ha traducido a una condición análoga a la de Gauss sobre las hipersuperficies de indiferencia cuando nos movemos *entre* dichas hipersuperficies. Encontrar esa condición es todavía un problema abierto para esta investigación.

Referencias

Barwise, J., 1977, *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam.

Debreu, G., 1972, "Smooth Preferences", en Debreu 1983, pp. 186–201.

——, 1976, "Smooth Preferences: A Corrigendum", en Debreu 1983, pp. 201–202.

——, 1983, *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Gauss, C.F., 1827, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Traducción al inglés: *General Investigations of Curved Surfaces*, Morehead & Hiltebeitel, Princeton, 1902.

Hicks, N. J., 1965, *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York.

Mas-Colell, A., 1985, *The Theory of General Equilibrium. A Differentiable Approach*, Cambridge University Press, Cambridge.
———, M.D. Whinston y J.R. Green, 1985, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Nueva York/Oxford.
Stroyan, K.D., 1977, "Infinitesimal Analysis of Curves and Surfaces", en Barwise 1977, pp. 197–231.

Recibido el 8 de septiembre de 2011
Aceptado el 30 de noviembre de 2011